

# De l'analyse des réseaux expérimentaux à la méta-analyse

Méthodes et applications avec le logiciel R  
pour les sciences agronomiques  
et environnementales

D. Makowski, F. Piraux, F. Brun





# De l'analyse des réseaux expérimentaux à la méta-analyse

Méthodes et applications  
avec le logiciel R pour les sciences  
agronomiques et environnementales

David Makowski, François Piraux, François Brun

Éditions Quæ

## Collection *Savoir-faire*

Nutrition minérale des ruminants – Nouvelle édition

F. Meschy

2017, format ebook uniquement.

Les sols

Intégrer leur multifonctionnalité pour une gestion durable

A. Bispo, C. Guellier, E. Martin, J. Sapijanskas, H. Soubelet, C. Chenu, coord.

2016, 384 p.

Protection agroécologique des cultures

J.-P. Deguine, C. Gloanec, P. Laurent, A. Ratnadass, J.-N. Aubertot, coord.

2016, 288 p.

Né d'une volonté de conjuguer production agricole et protection de l'environnement, le département Environnement et Agronomie de l'Institut national de recherche agronomique fête ses 20 ans. Pour l'occasion, une série d'ouvrages dédiés à des thématiques emblématiques du département est publiée. Le présent ouvrage est consacré à l'analyse statistique des données issues de réseaux expérimentaux et à la méta-analyse. Les méthodes proposées permettent de réaliser des synthèses quantitatives fiables, utilisables dans les études évaluant l'impact agronomique et environnemental des pratiques agricoles.

Cet ouvrage a reçu le soutien financier du département Environnement et Agronomie de l'Inra, d'Arvalis-Institut du végétal et de l'Acta – les instituts techniques agricoles.



Illustrations de la couverture :

- Photo principale : Arvalis-Institut du végétal
- Petites photos : Arvalis-Institut du végétal
- Schéma : D. Makowski

Éditions Quæ

RD 10, 78026 Versailles Cedex, France

© Éditions Quæ, 2018

ISBN 978-2-7592-2816-4

ISSN 1952-1251

Le Code de la propriété intellectuelle interdit la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Le non-respect de cette disposition met en danger l'édition, notamment scientifique, et est sanctionné pénalement. Toute reproduction, même partielle, du présent ouvrage est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC), 20 rue des Grands-Augustins, Paris 6<sup>e</sup>.

# Sommaire

---

<b>Chapitre 1. Introduction et exemples</b> .....	9
Objectifs de l'analyse de réseaux d'expérimentations et de la méta-analyse .....	9
Données.....	11
Le type de données.....	11
La collecte des données .....	11
La validation des données.....	11
Analyse.....	13
Principales étapes.....	13
Présentation des hypothèses testées.....	13
Collecte des données .....	13
Validation des données.....	13
Analyse des données .....	14
Validation de l'analyse.....	14
Communication des résultats .....	14
Objectif de l'ouvrage .....	14
Un exemple simple de modèle mixte .....	15
Définition .....	15
Données.....	15
Définition du modèle.....	17
Estimation .....	17
Comparaison avec le modèle sans effet aléatoire .....	19
Références .....	22

## Partie I

### Analyse des réseaux expérimentaux

<b>Chapitre 2. Notions de base</b> .....	25
Expérimentation agronomique .....	25

Réseau d'expérimentations .....	25
Définition .....	25
Exemple de réseau d'expérimentations.....	26
Notion d'environnement.....	27
Objectifs d'un réseau d'expérimentations .....	28
Notion de population d'environnements .....	28
Notion d'interaction.....	29
Références .....	31

### **Chapitre 3. Analyse d'un réseau d'expérimentations en blocs aléatoires complets à un facteur étudié .....**

Objectif du chapitre .....	33
Exemple « blé ».....	34
Modélisation .....	35
Modèle avec un effet expérimentation aléatoire .....	35
Modèle avec un effet expérimentation fixe.....	36
Exemple .....	37
Comment choisir entre un modèle avec un effet expérimentation fixe et un modèle avec un effet expérimentation aléatoire ? .....	40
Évaluation du modèle.....	41
Normalité.....	41
Homoscédasticité .....	41
Indépendance.....	42
Données suspectes.....	42
Comparaisons de moyennes .....	43
Tests d'hypothèse : tests d'égalité .....	43
Intervalles de confiance .....	44
Tests d'hypothèse : tests d'équivalence .....	46
Exemple .....	48
Exemple « blé » : script R et analyse commentée.....	51
Références .....	61

### **Chapitre 4. Méthodes avancées pour l'analyse des réseaux .....**

Analyse des données moyennes.....	63
Étape 1 : analyse des expérimentations individuelles pour estimer les moyennes des traitements.....	64
Étape 2 : analyse des données moyennes.....	64
Exemple .....	65

Une variante : analyse des données moyennes avec un modèle fixe .....	69
Estimation de la variance d'interaction traitement-expérimentation ....	70
Script R.....	71
Expérimentations avec variances hétérogènes .....	73
Introduction.....	73
Exemple « blé » .....	74
Pour aller plus loin .....	78
Données manquantes .....	81
Origine des données manquantes .....	81
Moyennes ajustées .....	83
Les facteurs lieu et année .....	88
Objectif.....	88
Exemple « blé_pluri » .....	88
Modèle pour l'analyse des données moyennes.....	89
Estimation de la variance de l'interaction traitement-année-lieu .....	90
Variance de la différence entre deux traitements .....	91
Analyse de l'exemple « blé_pluri » et script R.....	91
Références .....	97
<b>Chapitre 5. Planification d'un réseau d'expérimentations .....</b>	<b>99</b>
Objectif.....	99
Comparaison de deux traitements .....	100
Cas d'un réseau multilocal.....	100
Cas d'un réseau multilocal et pluriannuel .....	102
Autres contrastes .....	104
Comparaison à la moyenne de plusieurs témoins.....	104
Comparaison à la moyenne générale.....	105
Références .....	106

## Partie II

### La méta-analyse

<b>Chapitre 6. Notions de base pour la méta-analyse .....</b>	<b>109</b>
Définition, origine et principales étapes de la méta-analyse.....	109
Estimation d'une taille d'effet moyenne.....	111
Objectif.....	111
Recherche systématique des études, sélection des références et extraction de données .....	113

Estimation de la taille d'effet moyenne avec un modèle sans effet aléatoire.....	115
Estimation de la taille d'effet moyenne avec un modèle à effets aléatoires .....	118
Métarégression .....	122
Objectif.....	122
Exemple .....	122
Modèles de régression avec et sans effet aléatoire .....	124
Exemple (suite) .....	125
Analyse critique des résultats .....	127
Références .....	130
<b>Chapitre 7. Problèmes statistiques spécifiques pour la méta-analyse.....</b>	<b>133</b>
Définition de la taille d'effet .....	133
Correction des biais liés à l'utilisation de ratios.....	133
Différence entre moyennes d'observations .....	134
Tailles d'effet pour les données binaires .....	134
Coefficient de corrélation .....	136
Tailles d'effet basées sur la variance.....	136
Modèles linéaires généralisés pour l'analyse de données discrètes.....	137
Modèle binomial logit à effets aléatoires pour analyser l'effet d'un traitement .....	137
Exemple .....	138
Modèles non linéaires mixtes.....	141
Intérêt et définition .....	141
Exemple .....	142
Modèles bayésiens .....	145
Définition .....	145
Exemple : méta-analyse avec MCMCglmm.....	146
Références .....	151
<b>Annexe. Ressources R pour mettre en œuvre les méthodes d'analyse des réseaux et de méta-analyse.....</b>	<b>153</b>
Package KenSyn : code R et jeux de données des exemples présentés dans les différents chapitres.....	153
Installation .....	153
Contenu et utilisation .....	154



Mettre en œuvre le modèle mixte sous R.....	157
Ajuster un modèle mixte .....	157
Manipuler les résultats des modèles mixtes sous R.....	158
Le package metafor, dédié à la réalisation de méta-analyses sous R.....	160
Approche bayésienne avec le modèle mixte.....	160
Package MCMCglmm .....	160
Package coda .....	160
Références .....	161



# 1

## Introduction et exemples

---

### Objectifs de l'analyse de réseaux d'expérimentations et de la méta-analyse

De nombreuses expérimentations sont réalisées chaque année pour analyser les effets des pratiques agricoles sur la production et sur l'environnement. Chaque expérimentation est composée de traitements expérimentaux appliqués sur des parcelles expérimentales pendant une ou plusieurs années. En fonction de l'objectif de l'expérimentation considérée, les traitements expérimentaux correspondent à différents types de pratiques agricoles, par exemple à des méthodes de lutte contre les bioagresseurs, à des pratiques de fertilisation, à différentes dates de semis, à différentes successions de cultures, ou à des variétés. Une ou plusieurs variables sont mesurées sur chaque traitement dans le but de caractériser le couvert végétal (rendement, qualité des produits, surface foliaire, etc.) ou l'environnement de la culture (caractéristiques du sol, émissions de gaz à effet de serre, pollution de l'eau, impact sur la biodiversité, etc.). Ces expérimentations fournissent des résultats précieux permettant de mieux comprendre les effets des pratiques agricoles sur les cultures et sur les risques environnementaux. Elles sont réalisées par des acteurs variés : instituts de recherche, instituts techniques, chambres d'agriculture, entreprises.

Les résultats des expérimentations agronomiques sont susceptibles de varier fortement entre sites et entre années. L'effet des pratiques agricoles dépend de facteurs locaux liés, notamment, au climat et aux caractéristiques du sol. Afin d'étudier la variabilité des résultats de pratiques agricoles, les expérimentations agronomiques sont souvent réalisées en réseaux. Dans ce cas, un même ensemble de traitements expérimentaux est testé sur plusieurs sites et sur plusieurs années de manière à pouvoir étudier la variabilité des effets et estimer leurs moyennes. Les expérimentations variétales constituent un exemple classique de réseaux expérimentaux. Dans ce cas particulier, différentes variétés sont cultivées sur plusieurs sites et sur plusieurs années de manière à pouvoir analyser les performances moyennes des variétés testées et leur variabilité.

Dans un réseau expérimental, les observations sont obtenues dans des conditions parfois très différentes (différents types de sol, différents climats, etc.). Cependant,

lorsque les expérimentations du réseau testent des hypothèses communes, leur analyse globale est très utile car elle permet :

- de consolider les résultats. Les résultats d'une expérimentation peuvent être imprécis. La prise en compte des résultats de plusieurs expérimentations permet d'augmenter le nombre de données disponibles pour estimer les quantités d'intérêt ;
- de généraliser les conclusions. Comme les résultats d'une expérimentation agronomique varient entre sites et entre années, la synthèse des résultats de plusieurs expérimentations permet d'analyser la robustesse des conclusions et d'étendre leur portée à un ensemble d'environnements ;
- de comprendre la variabilité. L'analyse de réseau d'expérimentations permet également de mieux comprendre l'origine de la variabilité de certains résultats. Si chaque expérimentation individuelle est caractérisée par une ou plusieurs covariables (ex. : précipitation, température, type de sol, incidence de bioagresseur), il est possible de relier ces covariables aux effets de traitements expérimentaux étudiés. Une telle analyse permet de mieux comprendre les effets de ces traitements et d'affiner les recommandations des pratiques agronomiques en fonction des particularités du contexte local.

L'objectif de la méta-analyse est proche de celui de l'analyse des réseaux expérimentaux. La méta-analyse permet d'analyser des résultats issus d'un ensemble d'expérimentations réalisées dans des conditions variées et traitant d'un sujet commun. À la différence des réseaux expérimentaux, les expérimentations prises en compte dans une méta-analyse n'ont pas été initialement réalisées pour être synthétisées et analysées de manière globale ; une méta-analyse fait la synthèse d'expérimentations conduites de manière indépendante, généralement par des institutions différentes, parfois dans des régions très éloignées géographiquement. Ces expérimentations sont mises en commun *a posteriori*, souvent bien après leur réalisation.

Contrairement à l'analyse de réseaux expérimentaux, la méta-analyse ne se résume pas à une analyse statistique d'un ensemble de données expérimentales collectées dans des conditions hétérogènes ; elle inclut une étape préalable dont l'objectif est de récupérer le plus grand nombre d'expérimentations réalisées pour tester une question donnée. Cette étape de collecte de données est très importante et mobilise des démarches spécifiques dont la mise en œuvre peut parfois être coûteuse en temps. Sur certains sujets stratégiques, de nombreuses études sont réalisées et publiées de manière indépendante par différentes équipes appartenant à diverses institutions. C'est par exemple le cas des études visant à comparer les systèmes de type « agriculture biologique » aux systèmes dits « conventionnels », de celles visant à étudier l'impact du non-travail du sol ou à évaluer les performances de cultures génétiquement modifiées, ou encore des études mesurant les émissions de gaz à effet de serre produites par la fertilisation azotée. Sur de tels sujets, des dizaines et parfois des centaines d'études sont conduites sur un pas de temps plus ou moins long (généralement 10-20 ans) et leurs résultats sont publiés de manière indépendante dans des rapports et des revues scientifiques. La récupération des données publiées sur ces sujets n'est pas triviale et nécessite l'utilisation de procédures de recherche et d'extraction de données rigoureuses.

## Données

Si les objectifs de l'analyse de réseaux d'expérimentations et de la méta-analyse sont proches, le type de données mobilisées, la collecte des données et leur validation sont, par contre, souvent très différents.

### Le type de données

Dans le cas d'un réseau d'expérimentations, les données élémentaires sont généralement disponibles. Il est donc possible de réaliser les analyses des expérimentations individuelles, ainsi que l'analyse du réseau, à partir des données de base.

Dans le cas d'une méta-analyse, les données élémentaires ne sont souvent pas disponibles. On ne dispose généralement, pour chaque expérimentation, que de données agrégées (ex. : moyennes, fréquences, écarts-types).

### La collecte des données

Dans le cas d'un réseau d'expérimentations, l'organisation de la collecte des données est décrite dans un protocole expérimental qui précise l'objectif du réseau, les traitements étudiés, le nombre d'expérimentations à mettre en place, le choix des lieux d'expérimentation, les conditions de leur réalisation (conduite de culture, etc.), le nombre de répétitions et le dispositif expérimental, le type de mesures à réaliser, etc.

Dans le cas d'une méta-analyse, les données sont souvent issues de publications scientifiques ou de rapports, obtenues à partir d'une revue bibliographique systématique des articles et/ou des rapports publiés sur la thématique d'étude. Les protocoles expérimentaux sont alors décrits au sein de chaque référence individuelle et peuvent varier fortement d'une référence à l'autre. Le processus de collecte des données nécessite un travail spécifique basé sur une démarche formalisée. Une telle démarche peut être très coûteuse en temps. Dans certaines méta-analyses, les données sont obtenues en contactant directement les responsables des expérimentations qui peuvent alors parfois fournir des données brutes.

### La validation des données

La validation des données a pour but de s'assurer que les données recueillies permettent bien de répondre à la question posée.

Dans le cas d'un réseau d'expérimentations, toutes les expérimentations partagent le même protocole expérimental et visent à répondre au même objectif. La validation des données consiste alors à vérifier que le déroulement des expérimentations est conforme à ce qui est prévu dans le protocole. Les expérimentateurs ont donc pour mission de relever en cours d'expérimentation tous les accidents et écarts au protocole observés (levée hétérogène suite à un problème de battance, apport d'azote retardé parce que la parcelle n'était pas accessible à la date prévue, etc.). En fin d'expérimentation, l'expérimentateur évalue si l'expérimentation est en mesure de répondre à l'objectif du protocole.

Dans le cas d'une méta-analyse, les informations disponibles sur les protocoles sont généralement moins détaillées. La personne responsable de la méta-analyse

doit estimer, pour chaque expérimentation, à partir des seules informations disponibles, si les résultats publiés permettent de répondre à l'objectif de la méta-analyse.

En pratique, la différence entre l'analyse d'un réseau d'expérimentations et une méta-analyse n'est pas toujours aussi tranchée.

Parfois, les données brutes du réseau d'expérimentations ne sont pas disponibles et l'analyse est alors réalisée sur des données agrégées (résultats moyens). Dans ce cas, cependant, une étape préalable consiste en l'analyse et la validation des données de chaque expérimentation à partir des données individuelles. L'analyse globale se fait ensuite à partir des valeurs moyennes, de la même façon que dans le cas d'une méta-analyse.

Dans d'autres cas, les expérimentations d'un réseau ne sont pas toutes basées sur le même protocole. Il peut s'agir de différences liées à la conduite des expérimentations, ou liées à la nature même des traitements étudiés. Par exemple, un réseau d'expérimentations dont l'objectif est d'évaluer le rendement de variétés de blé peut être composé d'expérimentations testant les mêmes variétés conduites de manières différentes (avec différentes méthodes de protection des cultures par exemple). Il est alors possible que certaines expérimentations soient moins bien protégées contre les maladies que d'autres. Par conséquent, les différences entre variétés observées dans certaines expérimentations seront essentiellement le reflet de leur potentiel de rendement, alors que dans d'autres expérimentations, elles refléteront également la sensibilité des variétés aux maladies. Les réseaux d'expérimentations dont l'objectif est d'évaluer des produits résiduels organiques (PRO) (fumier, lisier, etc.) constituent un autre exemple intéressant. Suivant les expérimentations, l'origine des PRO ne sera pas la même et, par exemple, le traitement appelé « fumier de bovin » pourra présenter de grandes différences de composition suivant les expérimentations en fonction du mode de production du fumier. L'interprétation des résultats dans ces deux situations est évidemment plus délicate que dans la situation idéale où le même protocole expérimental est strictement appliqué dans toutes les expérimentations.

Citons encore le cas où tous les traitements expérimentaux ne sont pas présents dans toutes les expérimentations. Cette situation peut concerner aussi bien un réseau expérimental qu'une méta-analyse. Dans ce cas, la comparaison des traitements étudiés est plus compliquée. En effet, lorsque deux traitements sont testés dans la même expérimentation, on peut comparer directement leur effet. Par contre, pour comparer deux traitements présents dans deux expérimentations différentes, il faudra procéder de manière indirecte en les comparant à d'autres traitements présents dans les deux expérimentations. En pratique, la comparaison entre deux traitements peut combiner comparaison directe et comparaison indirecte. Il faudra cependant, avant la réalisation de l'analyse des données, être attentif à l'origine de l'absence de certains traitements dans certaines expérimentations. En effet, si certains traitements ne sont pas présents dans certaines expérimentations parce qu'ils ne sont pas adaptés aux conditions de ces expérimentations (pédoclimats pas adaptés à ces traitements par exemple), l'absence des traitements n'est pas indépendante de leurs valeurs attendues. L'interprétation des résultats dans cette situation est plus délicate.

## Analyse

L'analyse des données de réseaux d'expérimentations ou de méta-analyses peut mobiliser de nombreuses méthodes statistiques, tant descriptives qu'inférentielles. Dans l'analyse des réseaux expérimentaux, l'analyse des interactions entre les traitements étudiés et les conditions expérimentales (interactions traitements-expérimentations) tient une place importante. L'interaction traitements-expérimentations se traduit par une variabilité de l'effet des traitements entre expérimentations, en lien, par exemple, avec le type de sol ou le climat. Dans la méta-analyse, le principal objectif de l'analyse statistique est d'estimer des effets moyens mais, dans certains cas, l'analyse des interactions est également importante. Le modèle mixte est un modèle statistique souvent utilisé pour faire la synthèse d'une série de résultats expérimentaux. Ce type de modèle permet de prendre en compte l'interaction traitements-expérimentations et d'étendre la portée des conclusions à un ensemble d'environnements, sans se restreindre aux seuls environnements observés. Ce type de modèle joue un rôle central, tant pour l'analyse des réseaux d'expérimentations que pour la méta-analyse. Un exemple simple mais illustratif est présenté dans la section « Un exemple simple de modèle mixte » de ce chapitre. Des méthodes descriptives, souvent graphiques, sont également utilisées dans les deux cas, comme les *forest plots* pour la méta-analyse et les *biplots* pour l'analyse des réseaux d'expérimentations. Ces graphiques jouent également un rôle important pour analyser les interactions traitements-expérimentations.

## Principales étapes

Les réseaux d'expérimentations et les méta-analyses nécessitent la mise en œuvre d'une méthodologie en plusieurs étapes. Dans les deux cas, les mêmes étapes sont suivies, mais des différences importantes peuvent apparaître au sein de certaines d'entre elles.

### Présentation des hypothèses testées

Les hypothèses testées dans l'analyse d'un réseau d'expérimentations ou dans une méta-analyse doivent être décrites de manière aussi précise que possible.

### Collecte des données

Dans le cas de réseaux d'expérimentations, les données ont été acquises pour répondre à un objectif précis. Le protocole a été mis en place *a priori* dans le but de réaliser une analyse globale des expérimentations, et les données brutes sont souvent disponibles. Dans le cas d'une méta-analyse, les expérimentations sont souvent plus hétérogènes et les données sont moins accessibles. Il est souvent nécessaire de les extraire d'articles et de rapports.

### Validation des données

Dans le cas de réseaux d'expérimentations, la validation des données repose notamment sur les notes de suivi des expérimentations rédigées lors de visites de

terrain, et sur l'examen des données individuelles. Dans le cas des méta-analyses, la validation des données passe par un examen critique et approfondi des articles et rapports collectés, et il est parfois nécessaire de contacter directement les responsables des expérimentations.

## Analyse des données

Différentes méthodes d'analyse peuvent être utilisées, mais le modèle mixte est couramment mobilisé aussi bien pour l'analyse de réseaux d'expérimentations que pour les méta-analyses.

## Validation de l'analyse

La validation de l'analyse consiste en la validation des hypothèses associées au modèle, telle que l'hypothèse de normalité des effets aléatoires par exemple. Dans le cas d'une méta-analyse, les conclusions peuvent être faussées par la présence d'un biais de publication qui apparaît lorsqu'on ne publie que certains résultats, par exemple uniquement les résultats montrant un effet significatif des traitements étudiés. La validation d'une méta-analyse passe donc par l'analyse du risque de biais de publication.

## Communication des résultats

Il est important de décrire la méthode utilisée et de présenter de manière transparente les résultats et les incertitudes associées.

## Objectif de l'ouvrage

Notre objectif est de présenter et d'illustrer les principales méthodes statistiques permettant de réaliser une synthèse quantitative des données issues des réseaux expérimentaux et des publications scientifiques. Chaque chapitre présente une ou plusieurs méthodes et illustre ces méthodes à l'aide d'exemples traités avec le logiciel libre R<sup>1</sup>. Les données et les codes R sont fournis et commentés afin de faciliter leur adaptation à d'autres situations pratiques. Ils peuvent être utilisés à partir du package R KenSyn<sup>2</sup> associé à ce livre.

Dans la partie suivante de ce chapitre, nous présentons un premier modèle statistique permettant d'analyser des réseaux expérimentaux simples et de réaliser des méta-analyses standard. La première partie de cet ouvrage (chapitres 2 à 5) décrit plusieurs extensions de ce modèle et montre comment elles peuvent être utilisées pour analyser différents types de réseaux expérimentaux. La seconde partie (chapitres 6 et 7) présente en détail les objectifs et les principales étapes de la méta-analyse. Enfin, l'annexe présente les principaux packages R permettant de réaliser les analyses statistiques. Chaque chapitre peut être lu de manière indépendante.

---

1. Gratuitement téléchargeable sur le site <https://cran.r-project.org/>.

2. <https://cran.r-project.org/web/packages/KenSyn/index.html> (consulté le 28/05/2018).



## Un exemple simple de modèle mixte

### Définition

Les modèles à effets aléatoires correspondent à un type de modèle statistique particulier souvent utilisé pour prendre en compte plusieurs sources de variabilité (Laird et Ware, 1982). Ce type de modèle comporte de nombreuses variantes qui généralisent les modèles de régression linéaires et non linéaires classiques. Certaines de ces variantes peuvent être complexes et inclure à la fois des effets aléatoires et des effets fixes. De tels modèles sont souvent appelés *modèles mixtes*.

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle à effets aléatoires gaussiens très simple décrivant deux sources de variabilité dans les données ; la variabilité intra-individu et la variabilité interindividus. Chaque source de variabilité est décrite par un effet aléatoire. Ce modèle est souvent utilisé dans les situations où plusieurs mesures sont collectées sur chaque individu de l'échantillon. Selon le contexte, un individu peut correspondre à un animal, un homme, une plante, etc. Dans l'exemple traité dans ce chapitre, un individu correspond à une étude expérimentale particulière, sur laquelle plusieurs mesures ont été réalisées. Bien qu'il soit très simple, ce modèle permet de répondre à plusieurs questions pratiques, notamment :

- estimer la valeur moyenne de la variable étudiée ;
- décrire la variabilité de cette variable entre études et au sein de chaque étude ;
- obtenir des estimations « locales » (spécifiques à chaque étude).

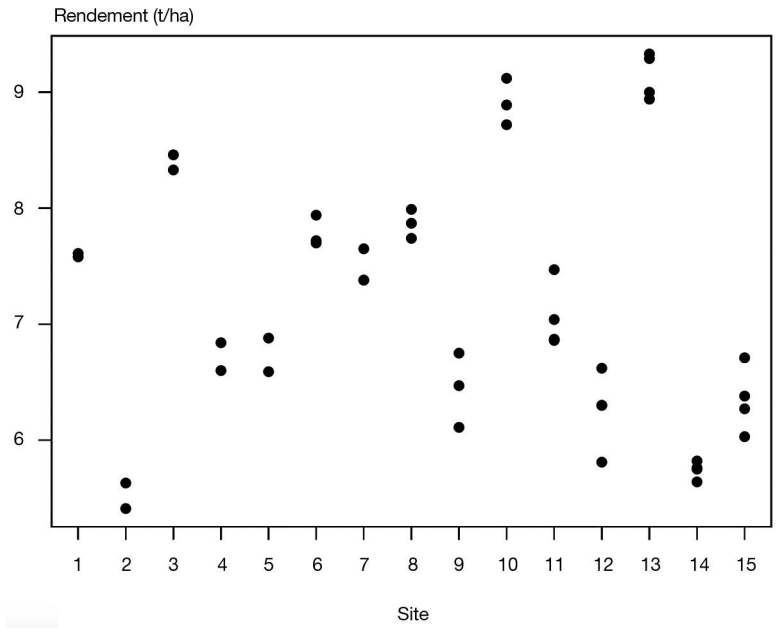
Ce modèle est souvent utilisé pour analyser des réseaux expérimentaux. Il constitue également un outil incontournable en méta-analyse (Mengersen *et al.*, 2013). Nous illustrons ici son intérêt en nous appuyant sur un exemple dont l'objectif est d'estimer le rendement moyen d'une culture dans une région agricole.

### Données

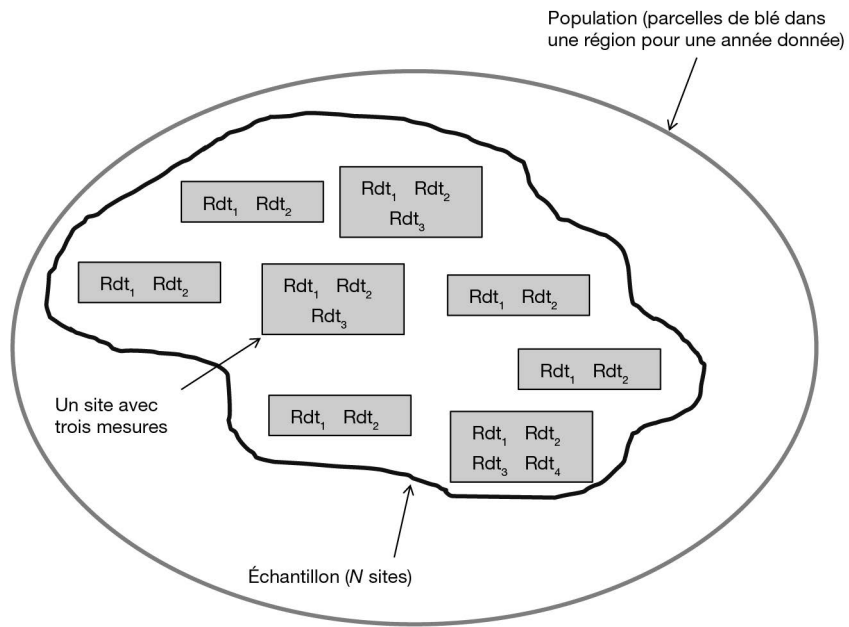
Le jeu de données est composé de 45 mesures de rendement de blé obtenues sur 15 sites expérimentaux (une année donnée) dans une région agricole. Dans ce jeu de données, une étude représente un site-année comportant 2 à 4 parcelles. Le rendement de la culture (exprimé en t/ha) a été mesuré sur chaque parcelle, et nous disposons ainsi de 2 à 4 mesures de rendement par étude (figure 1.1).

Dans cet exemple, la population correspond à l'ensemble des parcelles de blé de la région considérée pour l'année étudiée (figure 1.2). L'échantillon est défini par les 15 sites et les 45 mesures de rendement. Dans la partie suivante, nous montrons comment utiliser cet échantillon pour :

- estimer l'espérance du rendement dans la population (c'est-à-dire le rendement « moyen » de la région) ;
- estimer la variabilité du rendement entre sites et comparer cette variabilité à la variabilité intrasite ;
- estimer les rendements dans chacun des 15 sites.



**Figure 1.1.** Mesures de rendement du blé obtenues sur 15 sites une année donnée. Deux à quatre mesures ont été réalisées sur chaque site dans différentes parcelles.



**Figure 1.2.** Schéma décrivant la population et l'échantillon.

## Définition du modèle

Le modèle est défini par Laird et Ware (1982) :

$$y_{ij} = \mu + b_i + \varepsilon_{ij} \quad (1.1)$$

avec  $y_{ij}$  le rendement mesuré sur le site  $i$  dans la parcelle  $j$ ,  $i = 1, \dots, 15$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  ( $2 \leq n_i \leq 4$ ),  $\mu$  l'espérance du rendement dans la population,  $b_i$  l'effet aléatoire « site »,  $\mu + b_i$  le rendement moyen du site  $i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  le résidu intrasite décrivant l'écart entre  $y_{ij}$  et  $\mu + b_i$ . Les quantités  $b_i$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont définies comme des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, telles que  $b_i \sim N(0, \sigma_b^2)$  et  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . La variable aléatoire  $b_i$  correspond à l'écart entre le rendement du site  $i$  et la moyenne générale du rendement dans l'ensemble de la population.

Ce modèle inclut plusieurs paramètres de valeurs inconnues :

- la valeur de l'espérance ( $\mu$ ) ;
- la valeur de la variance intersites ( $\sigma_b^2$ ) ;
- la valeur de la variance intrasite ( $\sigma_\varepsilon^2$ ).

Selon ce modèle, deux rendements mesurés sur un même site ne sont pas indépendants. Leur covariance est égale à  $\sigma_b^2$  et leur corrélation est égale à  $\frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ .

Cette hypothèse de non-indépendance des mesures est cohérente avec la structure de notre jeu de données. La figure 1.1 montre bien en effet que les données collectées sur un même site se ressemblent ; elles forment des groupes couvrant des gammes de valeurs différentes selon le site considéré. Le modèle à effets aléatoires permet de décrire les corrélations entre les mesures collectées sur un même site avec seulement deux paramètres,  $\sigma_b^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Nous montrons ci-dessous comment estimer les paramètres du modèle (1.1) avec le logiciel R.

## Estimation

Si on suppose que  $\sigma_b^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  sont connus, l'estimateur le plus précis (de variance minimale) parmi les estimateurs sans biais de  $\mu$  est défini par :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^p w_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^p w_i} \quad (1.2)$$

avec  $\bar{y}_i$  la moyenne des mesures de rendement collectées sur le site  $i$ ,  $p$  le nombre de sites dans l'échantillon (ici,  $p = 15$ ), et  $w_i$  un poids défini par  $w_i = \frac{1}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 / n_i}$ .

L'estimateur défini par (1.2) est à une moyenne pondérée des rendements moyens observés sur chaque site  $\bar{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Le poids  $w_i$  est d'autant plus élevé que le nombre  $n_i$  de mesures disponibles sur le site  $i$  est grand. Il est intéressant de noter que les poids sont égaux lorsque tous les sites contiennent exactement le même nombre de mesures ou lorsque la variance intersites  $\sigma_b^2$  tend vers l'infini (elle domine alors largement la variance intrasite). Dans ce cas, l'estimateur (1.2) est

égal à la moyenne simple des  $p$  rendements moyens observés sur les  $p$  sites. Notons également que, lorsque la variance intersites tend vers zéro, l'estimateur (1.2) est égal à la moyenne des valeurs de  $\bar{y}_i$ , pondérées par les nombres d'observations collectés sur les différents sites.

La valeur de  $b_i$ , c'est-à-dire l'écart entre le vrai rendement du site  $i$  et la moyenne générale du rendement dans l'ensemble de la population, peut être estimée par :

$$\hat{b}_i = E(b_i | \bar{y}_i) = \frac{n_i \sigma_b^2}{n_i \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2} (\bar{y}_i - \mu) \quad (1.3)$$

Cette quantité correspond à l'espérance de  $b_i$  conditionnellement à la moyenne observée sur le site  $i$ . Cet estimateur est souvent appelé *estimateur bayésien empirique* car il correspond à une espérance *a posteriori*. Il correspond à l'estimateur de plus petite variance parmi tous les estimateurs sans biais (*Best Linear Unbiased Predictor*, ou BLUP). Il est intéressant de noter que, en valeur absolue, la valeur calculée avec (1.3) est inférieure à  $\bar{y}_i - \mu$ . L'estimateur (1.3) est en effet plus proche de zéro que  $\bar{y}_i - \mu$ .

Pour pouvoir calculer (1.2) et (1.3), il est nécessaire d'estimer les valeurs des variances  $\sigma_b^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$  à l'aide des données. Ces deux variances peuvent être estimées par maximum de vraisemblance restreint (REML) à l'aide des package **nlme** et **lme4** de R. Nous présentons des exemples de code R ci-dessous. De nombreux autres exemples sont présentés dans Pinheiro et Bates (2000) et dans Bates *et al.* (2015).

Le code R ci-dessous permet d'estimer les paramètres du modèle (1.1) avec la librairie **nlme** :

```
#Lecture du fichier externe incluant les données
TAB<-read.table("dataMod_1.txt", header=T)
#Chargement de la librairie nlme
library(nlme)
#Ajustement du modèle avec la fonction lme
Mod<-lme(Rdt~1, random=~1|Site, data=TAB)
#Affichage des résultats de l'ajustement
summary(Mod)
```

Les paramètres du modèle sont estimés avec la fonction **lme**. Les résultats de l'estimation, visualisés avec la fonction **summary**, sont présentés sur la figure 1.3. Les valeurs estimées des écarts-types  $\sigma_b$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont égales à 1,09 et 0,22, respectivement. Les variances sont égales aux carrés de ces écarts-types. La valeur estimée de  $\mu$  est égale à 7,2 (figure 1.3). L'écart-type de  $\hat{\mu}$  est égal à 0,28 (figure 1.3). Cet écart-type décrit l'incertitude dans l'estimation  $\hat{\mu}$ . Il ne doit pas être confondu avec  $\sigma_b$  qui décrit la variabilité intersites.

Les paramètres du modèle (1.1) peuvent également être estimés avec la fonction **lmer** de la librairie **lme4**, à l'aide du code suivant :

```
#Chargement de la librairie lme4
library(lme4)
#Ajustement du modèle avec la fonction lmer
```